特征值 eigenvalue
特征向量 eigenvector.

线性变换 $T: V \longrightarrow V \quad / \mathbb{K}$

$\dim V = 1$. V 有基 $B: v \neq 0$.

$$T(v) = \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$
$$[T]_B^B = \lambda$$

$\dim V = 2$, "希望 $V = W_1 \oplus W_2$". $\dim W_i = 1$

$$T(W_1) \subset W_1$$
$$T(W_2) \subset W_2.$$

能否作到? $T: \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ $\quad A \in M_2(\mathbb{K})$
一般不能 $\quad v \mapsto Av$

找 $W_1 = \mathrm{span}(v)$, $v \neq 0$

$T(v) = \lambda v$, $\quad A \cdot v = \lambda v$

$(\lambda I - A)v = 0$ $\boxed{\text{有非零解 } v.}$

$\iff$ $|\lambda I - A| = 0$. $\det(\lambda I - A) = 0$

λ满足 关于λ的二次方程.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\mathrm{Trace}(A)}\lambda + \underbrace{ad-bc}_{\det(A)}. \quad (*)$$

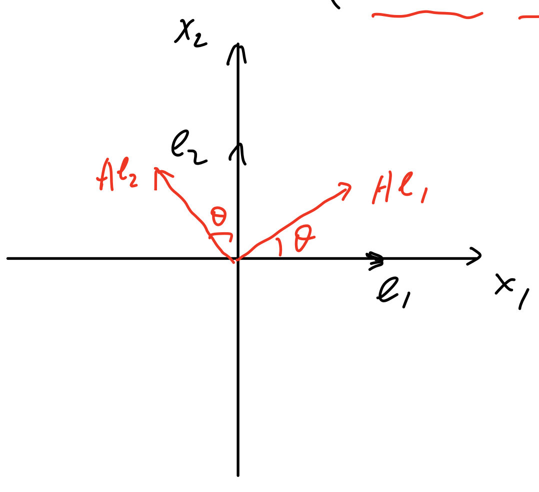
(*) 在 $\mathbb{K}$ 上无根.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$0<\theta<2\pi$
$\theta \neq \pi$

逆时针旋转 θ.



简单起见, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

$|\lambda I - A| = 0$ 有根

$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$

Case ①. $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 则有 $\begin{cases} Av_1 = \lambda_1 v_1, & v_1 \neq 0 \\ Av_2 = \lambda_2 v_2, & v_2 \neq 0 \end{cases}$

$W_1 = \operatorname{span} v_1. \quad W_2 = \operatorname{span} v_2$

性质: v_1, v_2 线性无关.

证明: 若 $v_1 = \mu v_2$, 则

$Av_1 = A\cdot(\mu v_2) = \mu(Av_2) = \mu\cdot\lambda_2 v_2$

$= \lambda_1 v_1 = \mu\cdot\lambda_1 v_2$

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\mu v_2 = 0$

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\mu = 0, \Rightarrow \mu = 0$

$\mathbb{C}^2 = W_1 \oplus W_2.$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ $\quad [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$P = [v_1, v_2]$, $\quad A(v_1, v_2) = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2)$

$A\cdot P = P\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Case 2. $\lambda_1 = \lambda_2$.

$$|\lambda_1 I - A| = 0.$$

$$\mathrm{rk}(\lambda_1 I - A) = 0 \text{ 或 } 1.$$

(2.1) $\mathrm{rk}(\lambda_1 I - A) = 0$. $A = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_1\end{bmatrix}$

(2.2) $\mathrm{rk}(\lambda_1 I - A) = 1$.

$$\lambda_1 I - A \neq 0.$$

$$\dim \underbrace{\ker(\lambda_1 I - A)}_{\mathrm{span}\, v_1 = W_1} = 1$$

扩充 v_1 为 $\mathbb{C}^2$ 的基 (v_1, v_2)

(例如: $A = \begin{bmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}$ $* \neq 0$)

$A(v_1, v_2) = (\lambda_1 v_1, a v_2 + b v_1)$

$A \cdot (v_1, v_2) = (v_1, v_2)\begin{bmatrix}\lambda_1 & b \\ 0 & a\end{bmatrix}$

$T(W_1) \subset W_1$, $\dim W_1 = 1$

这样的 W_1 是唯一确定的.

是否存在 W_2. $\underbrace{W_1 \oplus W_2}$ $= V = \mathbb{C}^2$

$$T(W_2) \subset W_2$$

不存在! 若 $A v_2 = \lambda v_2$, $v_2 \neq 0$.

则 $\lambda=\lambda_1$, $v_2\in W$,

一般的，V 是 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间。

$\dim V=n$.

定理：$T: V\to V$ 存在 V 的基 B.

$$[T]_B^B=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$ 上三角阵.

($A\in M_n(\mathbb{C})$, 存在 P 可逆，使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$)

A 的相似矩阵.

引入记号. $A\in M_n(\mathbb{K})$, $T: V\to V$.

定义（特征值） $Av=\lambda v$. $v\in\mathbb{K}^n$. $v\neq 0$

称 λ 是 A 的特征值，

v 是对应的特征向量.

($T(v)=\lambda v$, $v\neq 0$. $v\in V$)

$\ker(\lambda I - A)$ 是 A 的特征子空间.
(对于 λ)

$(\ker(\lambda Id - T) = \{v \mid Tv = \lambda v,\ v \in V\}$

证明：归纳法.

$\because$ A $\because$ $|\lambda I - A| = 0$ 是关于 λ 的 n 次首一多项式.

$\det \begin{bmatrix} \lambda - & & & \\ & \lambda - & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda - \end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & \vdots & \lambda_3 \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$P = (v_1\ v_2 \cdots v_n)$

$A \cdot P = (Av_1, Av_2, \cdots Av_n)$

$= (v_1, v_2 \cdots v_n) \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$

$Av_1 = \lambda_1 v_1$

$|\lambda I - A|$ 有根 λ_1.

有 $v_1 \neq 0$, $Av_1 = \lambda_1 v_1$

v_1 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的基. $v_1, v_2, \cdots v_n$

$$P = [v_1 \cdots v_n]$$

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right]$$

A_1 $(n-1)\times(n-1)$ 阶.

$$P_1^{-1}A_1P_1 = \begin{bmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & P_1^{-1}\end{pmatrix}(P^{-1}AP)\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & P_1\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & & * & \\ \hline 0 & \lambda_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{array}\right]$$

"T"

$|\lambda I - A| = 0$ 有根.

$Tv_1 = \lambda_1 v_1$. $\quad W = \text{span}\, v_1 \subset V$

$$\begin{array}{ccc} T: & V \to V & \\ & \cup \quad\; \cup & \\ & W \to W & \end{array} \qquad V \xrightarrow{I} V \to V/W$$

诱导 $\underline{V/W} \xrightarrow{\bar{T}} \underline{V/W}$

取 V/W 基 $\bar{B}$，$\overline{\text{原像}}^{\text{在}V\text{中的}}$，加上 v_1

得到 V 的基 B

$$[T]_B^B = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ 0 & [\bar{T}]_{\bar{B}}^{\bar{B}} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right]$$

定义：(特征多项式) $|\lambda I - A| = f_A(\lambda)$

characteristic polynomial.

$$f_A(\lambda) = f_{P^{-1}AP}(\lambda)$$

$$|\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P|$$
$$= |P^{-1}|\,|\lambda I - A| \cdot |P|$$

$$f_T(\lambda) = f_{[T]_B^B}(\lambda)$$

性质：$\{\text{特征值}\} = \{\lambda \mid f_A(\lambda) = 0\}$

定义： $f_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\lambda_s)^{m_s}$

$\lambda_1 \cdots \lambda_s$ 互不相同.

m_i 是 λ_i 的代数重数.

$\sum m_i = n$.

最理想的情形，有 P. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

定义： 上述 P 存在，则称 A 可对角化的.

定义'： $T: V \to V$，存在 T 的特征向量组成 V 的基.（T 可对角化）

问题： $\underbrace{\text{如何判定？}}$

V_{λ_i} 是 λ_i 的特征子空间.

$= \ker(\lambda_i I - A)$ $\quad \underline{\dim V_{\lambda_i} = d_i}$

V_{λ_1} 基 $v_1^1, v_2^1, \cdots v_{d_1}^1$ $\quad d_1 = \lambda_1$ 几何重数.

V_{λ_2} $\quad v_1^2 \cdots v_{d_2}^2$

$\vdots$

V_{λ_s} $\quad v_1^s \cdots v_{d_s}^s$

$\lambda_1 \cdots \lambda_s$ 互不相同.

性质: $V_1^1, V_2^1, \cdots V_{d_1}^1, \cdots V_{d_s}^s$ 线性无关.

证明: 有线性组合

$$\underbrace{a_1^1 V_1^1 + a_2^1 V_2^1 + \cdots}_{v_1} + \underbrace{a_{d_s}^s V_{d_s}^s}_{v_s} = 0$$

$$\underline{v_1 + v_2 + \cdots + v_s} = 0$$

$v_i \in V_{\lambda_i}$.

$$A(v_1 + v_2 + \cdots + v_s) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_s v_s = 0 \\ \lambda_1^2 v_1 + \lambda_2^2 v_2 + \cdots + \lambda_s^2 v_s = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{s-1} v_1 + \lambda_2^{s-1} v_2 + \cdots \lambda_s^{s-1} v_s = 0 \end{cases}$$

$$(v_1 \cdots v_s) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^{s-1} \\ 1 & \lambda_2 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \lambda_s & \lambda_s^2 & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix}}_{M.} = (0, \cdots 0)$$

$$(v_1 \cdots v_s) \underline{(M \cdot M^{-1})} = (0, \cdots 0)$$

$\Rightarrow \underline{v_i = 0}$

$\Rightarrow \underline{a_j^i = 0}$

$$\left(V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} \right)$$

$\mathrm{span}(v_j^i) = W$.

$T(W) \subset W$.

v_j^i 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的基 B.

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & \lambda_s \end{matrix} & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right]$$

$$f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{d_s} \cdot f_{A_1}(\lambda)$$

几何重数 $1 \le d_i \le m_i$.

性质: 可对角化 $\Leftrightarrow d_i = m_i$.

Cayley - Hamilton 定理.

$h(\lambda)=\sum a_i\lambda^i$

定义: 对多项式 $h(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]$

可以定义 $\longrightarrow$ $h(A)=\sum_{i\geq1}a_iA^i+a_0\cdot I\in M_n(\mathbb{K})$

$h(T)$

$:V\to V.$

$\underbrace{h_1(A)}\cdot\underbrace{h_2(A)}=(h_1h_2)(A)$

矩阵乘法

$(h_1+h_2)(A)=\underbrace{h_1(A)}+\underbrace{h_2(A)}$

定理: $f_A(\lambda)$ 满足 $f_A(A)=0$

$f_T(T)=0$

首先: $M_n(\mathbb{K})$ n^2 维.

$I,A,A^2,\cdots A^{n^2}$ 线性相关.

有 $a_0\cdot I+a_1A+\cdots a_{n^2}A^{n^2}=0$

证明: ① 定义: $\mathbb{K}[\lambda]\times V\longrightarrow V$

(扩充数乘) $(h(\lambda),v)\longmapsto h(\lambda)\cdot v$

定义为 $h(T)(v)$

$$(f_1 \cdot f_2) \cdot v = f_1 (f_2 \cdot v)$$

$$(f_1 + f_2) v = f_1 \cdot v + f_2 \cdot v$$

(A)

$$(cf) v = c \cdot (f v)$$

$$f \cdot (v + w) = f \cdot v + f \cdot v$$

$$f \cdot (cv) = c \cdot (f v)$$

对基 $v_1 \cdots v_n$

$$\lambda \cdot (v_1 \cdots v_n) = (T(v_1) \cdots T(v_n))$$

$$= (v_1 \cdots v_n) \cdot A$$

线性组合.

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A^T \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

标量数乘　　　线性组合.

$$\underline{(\lambda I - A^T)} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$M_n(\mathbb{K}[\lambda])$ 扩充数乘 $\mathbb{K}(\lambda)$

$$(\lambda I - A^T)^*(\lambda I - A^T) = |\lambda I - A| \cdot I.$$

(*)

$$(\lambda I - A^T)^* \cdot \left((\lambda I - A^T) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

扩充数乘

$$\left((\lambda I - A^T)^* \cdot (\lambda I - A^T) \right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法. 扩充数乘

$$\begin{pmatrix} |\lambda I - A^T| & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda I - A^T| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \underbrace{|\lambda I - A^T|}\cdot v_i = 0$

$\underbrace{f_{A^T}(T)}(v_i) = 0$

$f_{A^T}(T) = 0. \Rightarrow f_A(\lambda)$

代入 $\lambda = T$

$= 0.$

② A 上三角化 .（练习）

---

minimal polynomial $m(\lambda)$

$\{g(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda] \mid \underbrace{g(A)=0}\} = I$

A 的化 0 多项式

I ① 加法封闭

② 乘法吸收. $g(\lambda) \in I$.

$\forall h(\lambda)$. $h(\lambda)\cdot g(\lambda) \in I$.

取 $m(\lambda) \in I$，$m(\lambda) \neq 0$，$\deg m(\lambda)$ 最小.

Claim: $\forall\, g(\lambda) \in I$，$g(\lambda) = m(\lambda) \cdot h(\lambda)$

不然：$g(\lambda) = m(\lambda) h(\lambda) + r(\lambda)$

$0 \neq \deg r(\lambda) < \deg m(\lambda)$

带余除法.

$m(\lambda)$ A 的 minimal polynomial.

定理：A 可对角化 $\Leftrightarrow$ $m(\lambda)$ 没有重根（完全分解）

证明："$\Rightarrow$"

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$m(\lambda) \mid (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$

"$\Leftarrow$"

$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_s)$

$(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_s I) = 0$

取 $h_i(\lambda) = \dfrac{m(\lambda)}{\lambda - \lambda_i}$

$$g.c.d(h_1 \cdots h_s) = 1$$

$$k_1 h_1 + \cdots + k_s h_s = 1$$

$$(k_1 h_1 + \cdots + k_s h_s) \cdot v = v$$

$$v = \underbrace{(k_1 h_1 v)}_{v_1} + \cdots \underbrace{(k_s h_s v)}_{v_s}$$

$$v_i \in \ker(A - \lambda_i I)$$